

付録 A3 調和解析器の機構と原理

調和解析器の作動原理とフーリエ係数

作動原理、解析手法の詳細を記述するために、報告書の図 3.3 を最初に再掲する。

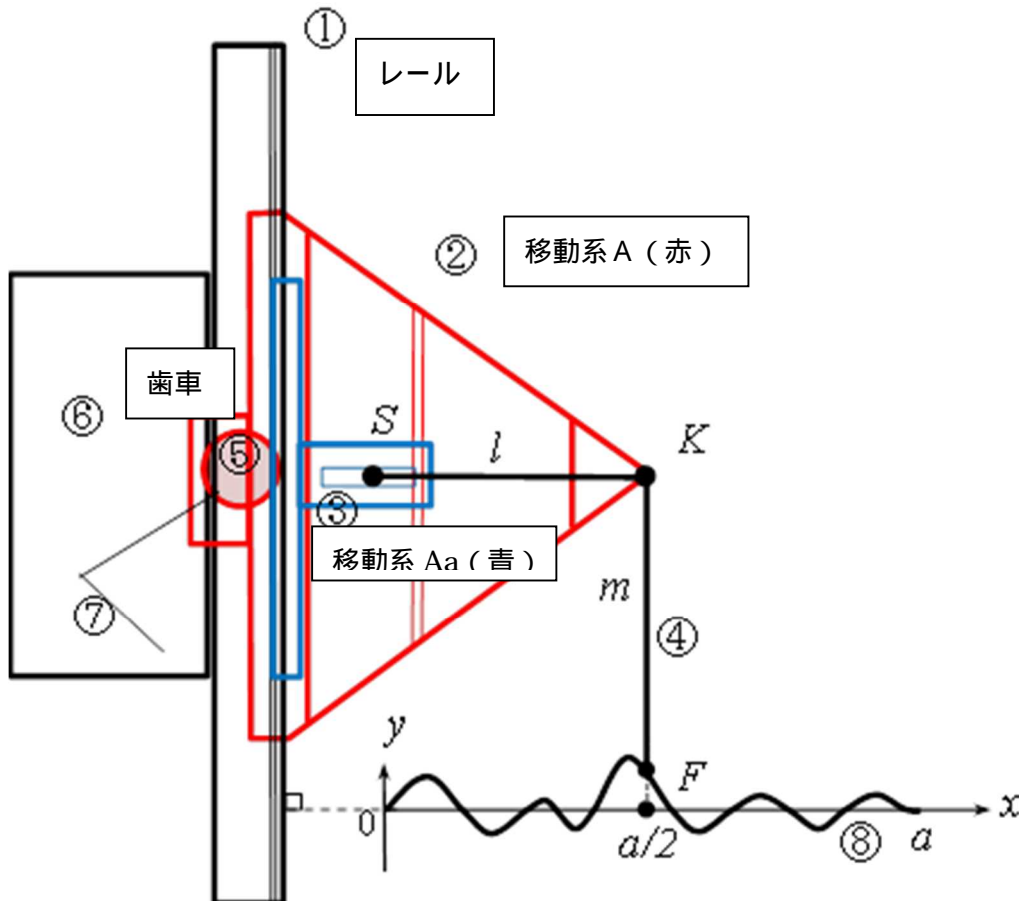


図 1 . 報告書の図 3.3 (再掲)

この機器の核心は、波形追跡ポイントF点の動きと、歯車の回転（それは、プランメータのトレース点がどのように動くか、という事だが）の関係を知る事にある。以下、この点に注目すると理解し易い。

図 1 に示した各指定点の記号を参考にして以下の原理の説明文をお読みください。

- ・ : 移動系 A が動く固定レールで、解析すべき変動波形の OX 軸と直交して設定する。
- ・ : 赤色台車、移動系 A ・ : 水色台車、移動系 A 上を動く移動系 Aa
- ・ : 梃子 FKS ・ : 半径 R の歯車で 移動系 A に搭載
- ・ 計測波形の長さ $a = m (= \overline{KF})$ となる様に m を調整した。・ $\overline{KS} = l = 20\text{cm}$

1 . 波形の微小面積素と歯車 の動き (プラニメータのトレース点の動き) の関係

1) ポインタ F 点が上下 (y 方向) だけに動いた場合、 移動系 A、 移動系 Aa は一緒に動くので歯車 (半径 R) の回転角 β は変わらない。プラニメータのトレース点 P_S をセットする穴がある歯車 は、両移動系と共に一緒に上下するだけである。

歯車半径 R と歯車中心からトレース点 P_S の穴までの距離 r ($R > r$) は少しだけ違う。

2) F 点が左右 (x 方向) だけに動いた場合、K 点は $x=a/2$ の線上を動きながら回転する。この K 点の回転が点 S を通じたスコッチヨーク機構により 移動系 Aa を動かす。その動きにより、歯車 が回転する。

即ち、F 点を x 方向に動かす場合、K 点は y 方向にも上下するが、歯車の回転 β を考える場合は K 点を固定して回転運動のみを考えて良い。

3) F 点が x 方向に x 動いたときの歯車 の回転角 β は、下記(9)式に示すが

$$\beta = \frac{lx}{Rm} \quad (1)$$

となる。なお、 $x = 0$ で $\beta = 0$ となるように初期にセットする。

4) プラニメータトレース点 P_S は歯車の回転 β により、下記の距離だけ動く。

$$\text{上下方向} : r \cdot \sin \beta \quad ; \quad \text{左右方向} : r(1 - \cos \beta) \quad (2)$$

5) 計測波形を追跡するポインタ F 点の動きを次のようにした場合を考える。

- 或る x に於いて関数値 $y(x)$ だけ上方に動き : □ 次に右に dx 動き
- 次に下方に $y(x)$ だけ動き : □ 次に左に dx 動き、最初に戻る。

この時、プラニメータのトレース点 P_S と歯車の回転はどう動くか考える。図 2 を参照。

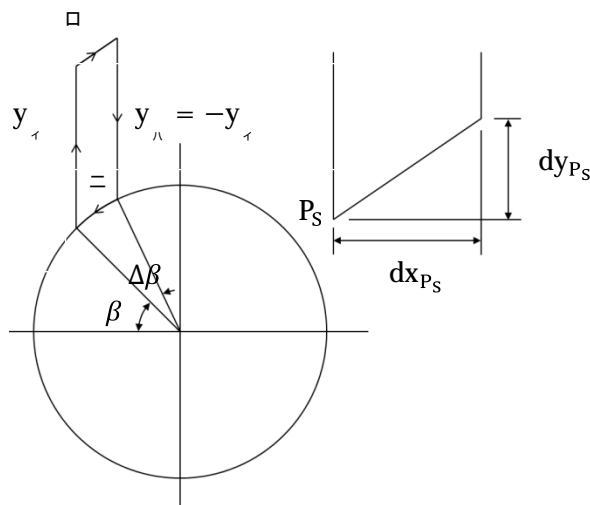


図 2 . 波形ポインタ F 点が微小面積素 ($y(x)dx$) を追跡した時、歯車 の P_S 点の動き
歯車の中心を D とする。

6) イの操作で点 P_s は、 y 方向上に y_1 だけ上がる。しかし、歯車は回転しない。

ロの操作で歯車の回転角 β の増分は、(1)式より、 $\Delta\beta_{\square} = \left(\frac{l}{Rm}\right) dx$ で与えられる。

ハの操作で点 P_s は、 y 方向に y_1 だけ下がる。しかし、歯車は回転しない。

ニで P_s は、上下 $dy_{P_s \square} = -dy_{P_s \square}$: 左右 $dx_{P_s \square} = -dx_{P_s \square}$ だけ動いて元に戻る。

即ち、このポイント F 点の微少部分の動きから歯車の P_s の x 、 y 方向の変化は(2)式より次式で与えられる。

a) $\Delta\beta$ による P_s の上下増分

$$\begin{aligned} dy_{P_s \square} &= r \left\{ \sin(\beta + \Delta\beta_{\square}) - \sin\beta \right\} \approx r \cos\beta \sin\Delta\beta_{\square} \approx r \cos\beta \cdot \Delta\beta_{\square} \\ &= r \cos\beta \cdot \frac{l}{Rm} dx \end{aligned} \quad (3)$$

b) $\Delta\beta$ による P_s の左右増分

$$\begin{aligned} dx_{P_s \square} &= -r \left\{ \cos(\beta + \Delta\beta_{\square}) - \cos\beta \right\} \approx +r \sin\beta \cdot \sin\Delta\beta_{\square} \approx r \sin\beta \cdot \Delta\beta_{\square} \\ &= r \sin\beta \cdot \frac{l}{Rm} dx \end{aligned} \quad (4)$$

7) 結局、ポイント F 点が、 $y(x)dx$ を一周した時、トレース点 P_s は平行四辺形イロハニの領域を一巡する。この平行四辺形の面積は、下記である。図2を参照。

$$y(x) \cdot r \cdot \sin\beta \cdot \frac{l}{Rm} dx = y(x) \cdot \underbrace{\left[\frac{r}{R}\right]}_1 \cdot \underbrace{\left[\frac{l}{m}\right]}_2 \cdot \sin\beta(x) \cdot dx \quad (5)$$

機器が与えられれば下線部 1,2 は決まる。歯車、梃子 FKS の設定が決まれば定数になるから、それを C とする。別言すると、この事は歯車の径を決める有効な情報となる。

結論を記すと、波形を追跡するポイント F 点が x の位置で $y(x)dx$ の微少面積素を一巡した時プラニメータのトレース点 P_s は、(1)式を $\beta(x)$ に代入した式で表現すれば次式になる。

$$C \cdot y(x) \sin\beta(x) \cdot dx = C \cdot y(x) \left(\sin\frac{l}{Rm} x \right) dx \quad (6)$$

即ち、プラニメータのトレース点 P_s はこの図形を一巡する。トレース点 P_s と直交しているトレース点 P_c ($DP_s \perp DP_c$) の座標は、 $\beta \rightarrow \beta + \frac{\pi}{2}$ とおいて次式になる。

$$C \cdot y(x) \cos\beta(x) \cdot dx = C \cdot y(x) \left(\cos\frac{l}{Rm} x \right) dx \quad (7)$$

両式を積分表示すれば、次節で詳説されるフーリエ級数を求める(12)、(13)式と同じである事が解る。この計測波形の微少面積素とプラニメータの動きの関係の考察を基にして、次節を読むと良く理解できるであろう。

2. 作動原理の詳細

和田英一東大名誉教授（IIJ 技術研究所所長）のホームページ <http://parametron.blogspot.jp/2013/07/blog-post.html> に「面積計を使う調和解析器」というタイトルで本計測器の作動原理が解説されている。以下ではその内容を抜粋し、詳細に説明を加えて紹介する。

面積計（プランメータ）以外の部分（調和解析器と解析される変動波形）を以下の図3のように表す。プランメータは報告書の3.1を参照してください。

1) この図は解析する変動波形を最初に設定した状況を示し、この図を使って解析する各種数値の説明をする。

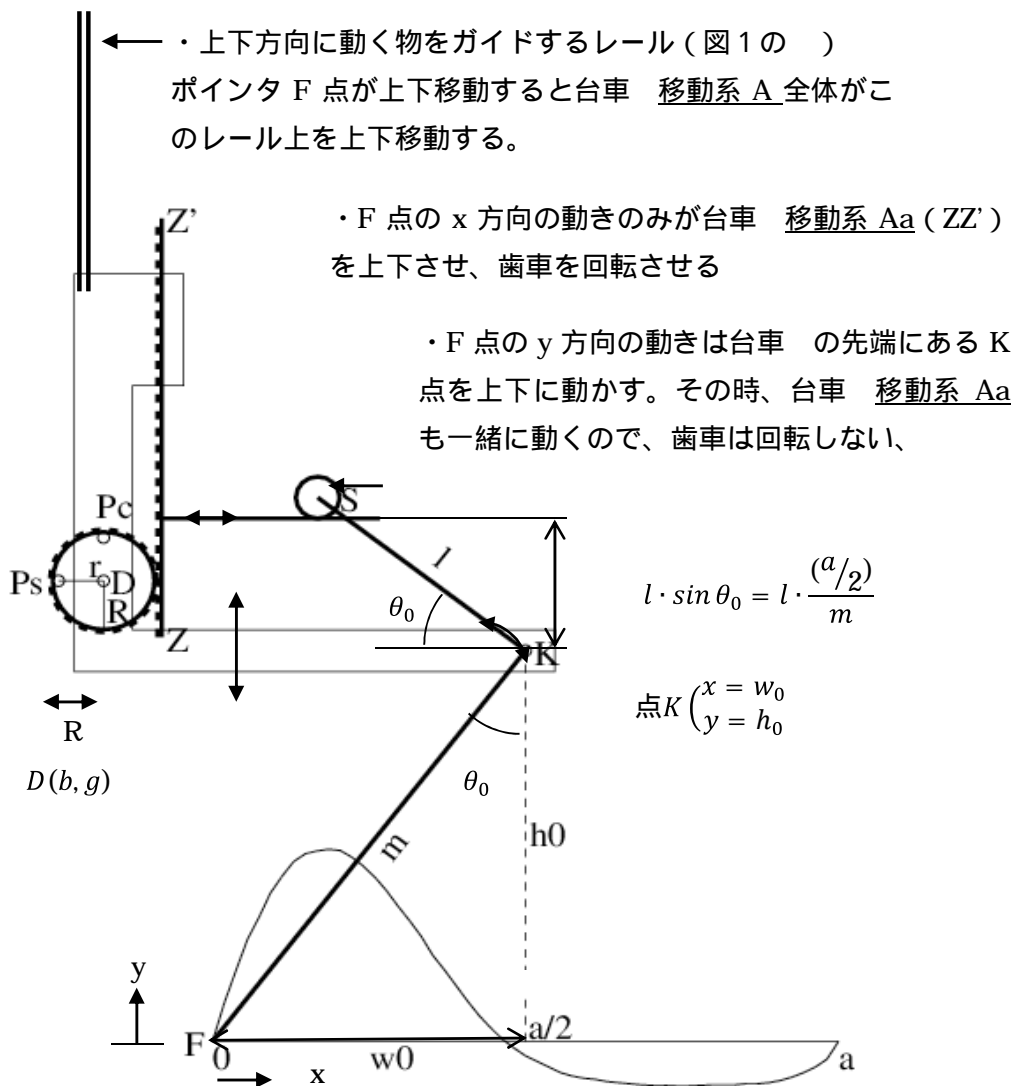


図3. 変動波形 f(x)を解析する時に初期設定された状態図

図1を更に模式的に書いた図。ポインタ F 点が原点にある状況図である。

上記波形曲線が解析すべき周期関数で、 $x=0$ から $x=a$ までが 1 周期である。その区間で一周する歯車を基本周期の歯車とする。 n 倍周期成分はその区間で n 回転 ($n=1,2,\dots$) する歯車に取り替えて解析する。

上図 ZZ' と連結されている S 点は K 点の回転により図 1 の台車 移動系 A で上下に動く。台車 移動系 A の右の腕の先に K という軸があり、梃子 FKS がその軸で回転できる。ここで、 $\overline{FK} = m$ である。この時の角度を θ_0 とする。これは初期設定で決まる。最初、下記のように梃子の状態を設定する。

$\overline{KF} \perp OX$ の状態で X 軸の中点を F 点と一致させる。この時、 $\overline{KF} \parallel$ レールである。

図 3 に示す初期設定時、K の x 座標は $w_0 = a/2$ 、y 座標は、 $h_0 = \sqrt{m^2 - (a/2)^2}$ となる。

すると、 $\sin \theta_0 = w_0/m = (a/2)/m$ が求められる。

梃子の下腕の長さ \overline{FK} は、解析する波形の長さに応じてポイント F 点が可動である。そのポイント F 点で波形を解析者が追跡する。

\overline{FK} と直行する梃子の腕 KS の長さ l の先にはローラー S があり、その上下で左の歯軌条 ZZ' (青色の移動系) が一緒に上下する。

台車 移動系 A には点 D を中心とする半径 R の歯車がある。それは、台車 に対する台車 の、即ち ZZ' の相対的上下移動に従って回転する。よって K が上下だけをして歯車 は回転することはない。K 点が回転する時だけ歯車 は回転する。この事はこのシステムの重要な点である。出発位置での D の座標を (b,g) とする。

この歯車には、中心 D から r だけ離れた左と上に穴 Ps と Pc があって、それに面積計のトレース点 (針) を接続する。直線 DPs と直線 DPc は直交している。これは、フーリエ係数の sin 成分と cos 成分を求めるために直交している。

ポイント F 点が波形 $f(x)$ を追跡し、一周して来ると台車や梃子が動き、歯車も上下に移動しながら回転し、その歯車の 1 点の描く面積を面積計で計測する。

半径 R の歯車はポイント F 点が $x=0$ から $x=a$ まで変動波形を追跡移動した時に、丁度 n (Fourier 係数の次数) 回転するように出来ている。

次数 n に従って歯車の半径 R は変わり、別の歯車が用意されている。それぞれの歯車に対応して異なる歯車回転軸用の穴が用意されている。(付録 A2 調和解析器写真集参照)

2) 上述の操作によってフーリエ係数が求められる理由

ポイント F 点が曲線 $f(x)$ の (x,y) まで移動した時の様子を図 4 に示す。x だけ動くと K 点は上下とともに回転する。この時、 $x=a/2$ の点を M とし、 $\angle FKM = \theta$ とする。

この時の K 座標は $(w_0, y+h)$ である。K 点から見て S 点が最初の点から下がった変位は下記である。

$$l \cdot \sin \theta_0 - l \cdot \sin \theta = l \frac{1}{m} \left(\frac{a}{2} - \left(\frac{a}{2} - x \right) \right) = \frac{x l}{m} \quad (8)$$

これが台車 に対する ZZ' の相対的上下移動である。故に、点 D を軸とする半径 R の歯車

Pcの軌跡による（取り囲んだ）面積 Fl_c は、(10)式より以下となる。

$$Fl_c = \oint YdX = \int_{x=0}^a YdX + \int_{x=a}^0 \underline{Y|_{y=0}}dX = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \cdot \cos \frac{xl}{Rm} dx \quad (12)$$

下線部で示した式は、解析するグラフ上でポイントF点を $y=0$ に沿って $x=a$ から $x=0$ にもどす操作を表現している。最後にこの式に相当する操作が必要である。

同様に、Ps点の軌跡による（取り囲んだ）面積 Fl_s は、次式で得る事ができる。

$$Fl_s = \oint YdX = \int_{x=0}^a YdX + \int_{x=a}^0 Y|_{y=0}dX = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \cdot \sin \frac{xl}{Rm} dx \quad (13)$$

Fl_c や Fl_s の値は面積計（インテグレーター）により計測される。

さて、区間 $[0 \sim a]$ で n 周期の波の波数を k_n とすると、 $k_n = n(2\pi/a)$ である。 $n=1$ の時は、区間 $[0 \sim a]$ 内に一波長分が収まる場合である。 n の場合は n 波長分が区間内に収まる場合である。上式の角度部 xl/Rm が $n(2\pi/a)x$ になる様に歯車の半径 R を選定すれば、 $n=1,2,3\dots$ の周期成分と取り出すための歯車の半径を次式で決められる。

$$R_n = a \frac{l}{m} \frac{1}{2\pi n} = \frac{1}{2\pi} \frac{al}{m n} \quad (14)$$

即ち、ポイントF点が $x=a$ まで動いたときに n 回転する歯車を用意する。即ち、解析する波形区間 $[0 \sim a]$ に含まれる n 周期成分を取り出す歯車を n 次用歯車と言うと、

$$n = 1 : R_1 = a \frac{l}{m} \frac{1}{2\pi} ; n = 2 : R_2 = a \frac{l}{m} \frac{1}{2\pi \cdot 2} ; n = 3 : R_3 = a \frac{l}{m} \frac{1}{2\pi \cdot 3} : \text{*****} \quad (15)$$

で与えられる。ここで、本解析で使われた数値、

$$\text{データ長さ: } a = 20\text{cm}, \quad m = 20\text{cm}, \quad l = 20\text{cm},$$

を代入して $n = 1,2,3,\dots$ に対応する歯車半径 R_n を決める事ができる。 l を決めた時、 m と a が比で与えられているから、長いデータ（ a が大きい）であってもそれに対応して、 m を大きくすれば、歯車の径は同じでも良いことになる。

(12)式、(13)式を、歯車径を n 次用歯車の径として表示した(14)式を使うと

$$Fl_c = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \cdot \cos \frac{xl}{Rm} dx = n\pi r_n \frac{2}{a} \int_0^a y \cdot \cos \left(n \frac{2\pi x}{a} \right) dx = n\pi r_n C_n \quad (16)$$

$$Fl_s = \frac{rl}{Rm} \int_0^a y \cdot \sin \frac{xl}{Rm} dx = n\pi r_n \frac{2}{a} \int_0^a y \cdot \sin \left(n \frac{2\pi x}{a} \right) dx = n\pi r_n S_n \quad (17)$$

となり、これらからフーリエ係数 C_n, S_n が下式で求められる。

$$C_n = \frac{Fl_c}{n\pi r_n} \quad : \quad S_n = \frac{Fl_s}{n\pi r_n} \quad (18)$$

面積計(インテグレータ)により計測された Fl_c, Fl_s の値と、用いた n 次歯車の中心点 D と穴迄の距離 r_n によりフーリエ係数が上式で求められる。

ここで、歯車の中心点 D と Ps 点、Pc 点の間の距離 r_n は、下記である。

$$1 \text{ 次用 } r_1 = 3.2 \text{ cm} : 2 \text{ 次用 } r_2 = 1.6 \text{ cm} : 3 \text{ 次用 } r_3 = 1.08 \text{ cm}$$